

基于网格的最小交叉熵算法在 PET 图像重建中的应用

戴修斌, 朱宏擎, 舒华忠, 罗立民

(东南大学计算机科学与工程系影像科学与技术实验室, 江苏南京 210096)

摘要: 基于内容的自适应三角形网格模型是描述图像的一种有效方法, 本文将网格模型与最小交叉熵算法相结合, 并加入先验解剖信息, 用于 PET 图像重建. 在本文提出的新算法中, 先将投影数据用滤波反投影方法(FBP)生成参考图像, 再对参考图像提取网格节点, 用加入先验解剖信息的最小交叉熵算法对网格节点灰度值进行迭代计算, 最后利用迭代后的网格节点灰度值对像素点进行插值得到重建后的图像. 在仿真实验中, 将该算法与最大似然方法(MLEM)等算法作比较, 并分析了参数对重建结果的影响.

关键词: 基于内容的自适应网格模型; 最小交叉熵算法; PET 图像重建

中图分类号: TP391.4 **文献标识码:** A **文章编号:** 0372-2112(2006)11-1999-05

Minimum Cross-Entropy Reconstruction of PET Images Based on a Content-Adaptive Mesh Model

DAI Xiubin, ZHU Hongqing, SHU Huaizhong, LUO Limin

(Lab of Image Science and Technology, Department of Computer Science and Engineering, Southeast University, Nanjing, Jiangsu 210096, China)

Abstract: Content adaptive mesh modeling is an efficient method for image representation. In this paper, the minimum cross entropy algorithm using prior anatomical information, combined with mesh model, was applied to the reconstruction of PET images. In the proposed algorithm, the nodes of mesh model were extracted from a reference image obtained with FBP method; then, the values of the nodes were computed through the minimum cross entropy algorithm with prior anatomical information. Finally, the whole image was reconstructed by interpolation from the values of the nodes. The performance of the proposed method was tested and compared with other algorithms using a set of simulated data. The effect of the parameters on the result was also studied.

Key words: content adaptive mesh model; minimum cross entropy algorithm; reconstruction of PET (positron emission tomography) images

1 引言

正电子发射断层扫描仪 (Positron Emission Tomography, PET) 是目前医学界最先进的大型医疗诊断成像设备之一. 随着核医学断层影像设备的广泛应用和计算机技术的迅速发展, 图像重建方法作为该类设备中的一个关键技术, 其研究工作越来越受到重视. 但是由于临床数据中含有噪声, 而且实际应用中要求重建速度快, 所以如何提高重建速度和抑制噪声是 PET 重建算法的重要研究方向.

传统的 PET 重建方法包括滤波反投影方法 (Filter Back Projection, FBP), 最大似然方法 (Maximum Likelihood, MLEM)^[1], 最大后验方法 (Maximum a Posterior, MAP)^[2] 和最小交叉熵方法 (Minimum Cross entropy Reconstruction, MXE)^[3,4] 等. 最小交叉熵重建方法由最大似然估计和图像先验信息两个部分构成, 只要对最大似然估计部分做一些调整就可以实现该算法, 因

此最小交叉熵重建方法具有实现简单的优点; 又因为它较其他方法多加入了图像先验信息部分, 所以能获得比其他方法更好的重建结果. 但上述方法在迭代中需考虑每个点的情况, 从而增加了算法的复杂度. 基于内容的自适应网格模型是最近出现的一种新的基于不均匀采样的图像描述手段^[5,6], 该方法能使提取出的网格点的分布与图像的局部密度成比例. 为了提高重建图像质量并减少算法复杂度, 本文将这种网格模型与最小交叉熵方法相结合用于 PET 图像重建. 该算法的优点是迭代运算中毋须考虑每个点的值, 而只需使用提取出的网格节点的灰度值. 利用迭代后的网格节点灰度值对每个像素点进行 Lagrange 插值^[7], 可得到重建后的图像. 在仿真实验中, 我们将该算法与 MLEM 方法、MXE 方法以及基于网格的最大似然方法^[5]作比较, 并分析了参数对重建结果的影响. 试验结果表明, 该算法较其它几种常见的 PET 重建方法能够获得效果更好的重建图像.

2 基于三角形网格的图像描述方法

2.1 图像的特征图的提取

令 $f(x, y)$, 或简记为 $f(X)$, 为一幅二维图像, 定义 $\sigma(x, y)$ 为特征图函数: 则:

$$\sigma(x, y) = \left[\frac{\max_{0 \leq \gamma < 1} |f''_{\theta}(x, y)|}{\mu_{\max}} \right]^{\gamma} \quad (1)$$

其中 $f''_{\theta}(x, y)$ 是在点 (x, y) 处的二阶方向导数, μ_{\max} 为 $G(x, y)$ 的最大值, γ 是一个正的常数, 它的取值范围在 $0 < \gamma < 1$.

2.2 网格节点的生成

Floyd Steinberg 算法^[8] 是一种经典的误差扩散方法, 算法简述如下.

(1) 从第一个点开始, 以光栅扫描顺序进行处理.

(2) 令 $\sigma(x, y)$ 为点 (x, y) 处的特征函数值. 预先设定一个阈值 q , 在每一个点将 $\sigma(x, y)$ 与 q 相比较, 获得指示函数 $b(x, y)$

$$b(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \sigma(x, y) \geq q \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

计算点 (x, y) 的量化误差 $e(x, y)$:

$$e(x, y) = \sigma(x, y) - (2q)b(x, y) \quad (3)$$

(3) 找出点 (x, y) 的四个邻近的有因果关系的点, 即点 $(x, y+1)$, $(x+1, y-1)$, $(x+1, y)$, $(x+1, y+1)$, 将点 (x, y) 的量化误差 $e(x, y)$ 按比例分散到这四个邻点上, 然后修正这四个点的特征函数值:

$$\sigma(x, y+1) \leftarrow \sigma(x, y+1) + \omega_1 e(x, y) \quad (4)$$

$$\sigma(x+1, y-1) \leftarrow \sigma(x+1, y-1) + \omega_2 e(x, y) \quad (5)$$

$$\sigma(x+1, y) \leftarrow \sigma(x+1, y) + \omega_3 e(x, y) \quad (6)$$

$$\sigma(x+1, y+1) \leftarrow \sigma(x+1, y+1) + \omega_4 e(x, y) \quad (7)$$

这里的符号 \leftarrow 表示将符号右边的值赋给左边. 其中, 系数 ω_i 的值需根据相邻像素间的几何距离变化而进行相应的调整. 由于 ω_i 取值的变化对重建结果的影响很小, 因此在本实验中将其设为经典 Floyd Steinberg 算法中的系数值, 即 ω_i ($i=1, 2, 3, 4$) 分别为 $7/16, 3/16, 5/16, 1/16$ ^[9].

(4) 重复步骤(2)(3)直到所有像素点都处理完毕.

令 T 为得到的网格节点的总数, 则:

$$T = \sum_{x=1}^{n_x} \sum_{y=1}^{n_y} b(x, y) \quad (8)$$

其中, n_x 和 n_y 为图像的尺寸. 由上所述可知, 通过改变 q 和 γ 的值可以改变得到的节点的总数.

2.3 三角形网格的生成

二维 Delaunay 三角划分^[9] (简记为 DT) 是计算几何中的重要问题, 有着广泛的应用背景. 在给定一系列网格节点后, DT 算法能连接这些点形成三角网. 由于 DT 算法不在本文讨论范围内, 有兴趣的读者可参阅文献[9].

2.4 利用网格节点进行插值

在网格模型中, 图像某个像素 $X(x, y)$ 的灰度值可以通过对该像素所在的网格 D_l 的节点进行插值获得, 即:

$$f(X) = \sum_{k=1}^3 f(x_{l,k}) \Phi_{l,k}(X) + e(X) \quad (9)$$

上式中, $f(X)$ 表示位于第 l 个三角形网格 D_l 内的点 X 的灰度值. $f(x_{l,k})$ 是网格节点 $x_{l,k}$ 处的灰度值, $x_{l,k}$ 是网格 D_l 中第 k 个顶点, 下标 l 仅表示该节点是第 l 个三角形网格的顶点. $\Phi_{l,k}(X)$ 是与节点 $x_{l,k}$ 对应的插值基函数的值, $e(X)$ 是插值误差.

令 $\Phi_n(X') = \sum_{D_l \in Z_n} \sum_{k=1}^3 \Phi_{l,k}(X')$, 其中 Z_n 表示与第 n 个网格节点相连的所有网格节点所形成的区域. X' 表示图像中的任意点, 则 $\Phi_n(X')$ 表示是与第 n 个节点相连的所有节点对应的插值基函数 $\Phi_{l,k}(X')$ 的和. 式(9)可改写为:

$$f(X') = \sum_{n=1}^K f(x_n) \Phi_n(X') + e(X') \quad (10)$$

其中, $f(x_n)$ 是第 n 个节点的灰度值, $\Phi_n(X')$ 是与第 n 个节点相连的所有节点对应的插值基函数 $\Phi_{l,k}(X')$ 的和.

更进一步, 令 $f_m = [f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_k)]^T$ (下标 m 表示 mesh), $\Phi(X') = [\Phi_1(X'), \Phi_2(X'), \dots, \Phi_k(X')]^T$, 则式(10)可写成矩阵形式:

$$f(X') = \Phi^T(X') f_m + e(X') \quad (11)$$

在本文中使用的是 Lagrange 插值方法, 由于插值方法不在本文讨论范围内, 故不予讨论. 在对所有非网格节点用式(11)进行计算后就可以获得整幅图像的灰度值.

3 最小交叉熵算法

3.1 加入先验图像信息的最小交叉熵算法

重建图像和原始图像的交叉熵 $S(g, \mathcal{A}(X))$ 为^[4]:

$$S(g, \mathcal{A}(X)) = \sum_{i=1}^N [g_i \ln g_i - g_i \ln (\mathcal{A}(X))_i - g_i + (\mathcal{A}(X))_i] \quad (12)$$

其中, g 是预先获得的投影数据, \mathcal{A} 是概率矩阵, $f(X)$ 是图像灰度值的估计值, N 为图像中点的个数.

同样可得重建图像与图像先验信息之间的交叉熵 $S(f(X), p)$ 为:

$$S(f(X), p) = \sum_{j=1}^N [f(X)_j \ln f(X)_j - (f(X))_j \ln p_j - (f(X))_j + p_j] \quad (13)$$

其中 p 为图像先验信息.

又令:

$$J_{\beta}(f(X)) = S(g, \mathcal{A}(X)) + \beta S(f(X), p) \quad (14)$$

其中 β 为正常数.

图像重建的过程就是求取使式(14)中的 $J_{\beta}(f(X))$ 达到最小值的解的过程, 该解就是图像重建的结果. 求解方法如下^[4]:

$$f^{(n+1)}(X_j) = \frac{f^{(n)}(X_j)}{\sum_{i=1}^N a_{ij}} \left[\sum_{i=1}^N \frac{g_i a_{ij}}{\sum_{k=1}^N f^{(n)}(X_k) a_{ik}} - \beta \ln \left(\frac{f^{(n)}(X_j)}{p_j^{(n)}} \right) \right] \quad (15)$$

其中, $f^{(n)}(X_j)$ 为第 n 次迭代后第 j 个 X_j 的灰度值的估计值, $f^{(0)}(X_j)$ 可取任意非负常数; a_{ij} 为概率阵的元素; g_i 为投影

数据: $p_j^{(n)}$ 为第 n 次迭代后第 j 个的图像先验信息.

但是当 β 过大时会使 $\sum_{i=1}^N \frac{g_i a_{ij}}{\sum_{k=1}^N f^{(n)}(X_k) a_{ik}} < \beta \ln$

$\left[\frac{f^{(n)}(X_j)}{p_j^{(n)}} \right]$, 从而使 $f^{(n+1)}(X_j)$ 出现负值, 这是应该避免的.

所以当 β 过大时, 式(15)应修改为:

$$f^{(n+1)}(X_j) = p_j^{(n)} \exp \left[\frac{-1}{\beta} \left[\sum_{i=1}^N a_{ij} - \sum_{i=1}^N \frac{g_i a_{ij}}{\sum_{k=1}^N f^{(n)}(X_k) a_{ik}} \right] \right] \quad (16)$$

通过式(15)、(16)即可计算出重建图像的灰度值.

3.2 图像先验信息的计算

图像的先验信息 p 可用下式进行计算:

$$p^{(n)} = T_s(f^{(n)}(X)) \quad (17)$$

上式中的函数 T_s 是一个平滑滤波器, $p^{(n)}$ 表示在第 n 次迭代中的先验信息. 这里的平滑滤波可选择线性滤波、中值滤波等等, 本文选择的是使用均值模板的线性滤波器.

4 基于网格的最小交叉熵算法

如图 2 所示, 基于网格的最小交叉熵算法与一般的最小交叉熵算法的不同之处在于前者是以网格为基本单元进行重建, 后者是以图像为基本单元进行重建的, 前者是在后者基础上发展而来. 本文对基于像素的方法做出修改, 以适应网格计算的要求. 具体方法如下:

4.1 获取参考图像

显而易见, 三角形网格节点的提取需要有原始图像, 所以为了提取网格节点需要先利用一些简单的方法, 例如滤波反投影重建方法生成参考图像, 然后利用第 2 节所述方法提取网格节点.

4.2 生成三角形网格

在基于网格的最小交叉熵算法中网格生成方法与前面第 2 节中已经详细介绍了的方法是一致的, 在这里就不加赘述了.

4.3 网格节点灰度值的迭代

由于本文提出的算法是基于网格的, 所以不能直接使用上面的式(15)、(16)来计算, 必须作出改进. 具体需要改进的方面如下:

(1) 概率矩阵 A . 由于加入了网格计算, 所以要修改概率矩阵 A 的计算方法, 令:

$$c_{in} = \int_{D_n} A_i(X) \Phi_n(X) dX \quad (18)$$

用 c_{in} 来代替 a_{ij} . 其中 $A = (a_{ij})$, A_i 为概率矩阵 A 的第 i 行.

(2) 图像先验信息. 由于只有网格节点的灰度值代入迭代计算, 并且与每个网格节点临近相连的节点的个数是不一样的, 所以不能采用普通的 8 邻域模板来滤波.

令 R_n 为所有与第 n 个网格节点相连接的节点 X_n 的集合 (包括第 n 个节点), 则:

$$q_n^{(j)} = \frac{1}{M} \sum_{X_n \in R_n} f^{(j)}(X_n) \quad (19)$$

其中, M 为集合 R_n 中所属的网格节点的个数. $n = 1, 2, \dots, T$, T 为提取出的网格节点的数目. 则改进后的迭代公式如下:

$$f^{(j+1)}(X_n) = \frac{f^{(j)}(X_n)}{\sum_{i=1}^N c_{in}} \left[\sum_{i=1}^N \frac{g_i c_{in}}{\sum_{k=1}^T f^{(j)}(X_k) c_{ik}} - \beta \ln \left[\frac{f^{(j)}(X_n)}{q_n^{(j)}} \right] \right] \quad (20)$$

$$f^{(j+1)}(X_n) = q_n^{(j)} \exp \left[\frac{-1}{\beta} \left[\sum_{i=1}^N c_{in} - \sum_{i=1}^N \frac{g_i c_{in}}{\sum_{k=1}^T f^{(j)}(X_k) c_{ik}} \right] \right] \quad (21)$$

其中, $f^{(j)}(X_n)$ 表示第 j 次迭代后第 n 个网格节点 X_n 的灰度值, g_i 是投影数据.

4.4 通过网格节点重建图像

获得网格节点灰度值的估计值后, 利用 2.4 节的式(11)即可通过插值方法重建出图像, 在此就不展开论述了.

5 实验结果和讨论

本节主要给出对投影数据进行重建的结果, 并将仿真数据重建结果与 MLEM 方法、MXE 方法以及基于网格的 ML-EM 方法所得出的重建结果进行比较, 最后给出参数的选择对重建结果的影响的分析. 本文采用的仿真数据是由计算机产生的 Shepp Logan 头模型获得, 图像尺寸为 96×96 , 投影数据大小为 185×180 , 加入的噪声为泊松噪声, 实际光子数量为 10^5 . 临床投影数据的格式是 192×192 , 重建图像的尺寸是 128×128 , 所取的网格节点数分别为 1167、2811、6885, 所取的迭代次数分别为 5、15、25.

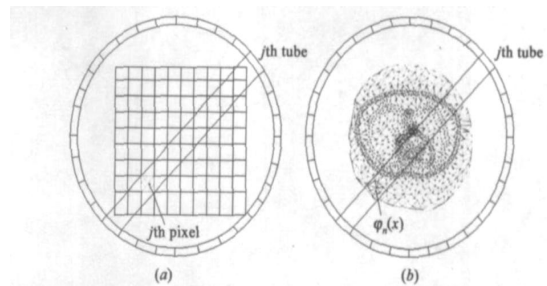


图 1 一般的最小交叉熵算法 (a) 与基于网格的最小交叉熵算法; (b) 的区别

误差分析采用参数 RSSE (Root Sum Square Error) 其定义如下:

$$RSSE(n) = \left[\sum_j (f^{(n)}(X_j) - f(X_j))^2 \right]^{1/2} \quad (22)$$

其中, $RSSE(n)$ 表示第 n 次迭代后模拟数据与重建数据的误差, $f^{(n)}(X_j)$ 表示第 n 次迭代后第 j 个图像 X_j 的灰度值的估计值, $f(X_j)$ 表示在仿真数据中第 j 个图像的灰度值. 由式(22)可看出: $RSSE(n)$ 的值愈小, 像素灰度值的估计值与真实值就愈接近, 即图像的重建效果就愈好.

5.1 仿真数据和临床数据的重建结果

我们将本文的方法及引言中介绍的算法用于模拟和真实 PET 数据的重建, 重建结果示于图 2 和图 3. 图 4 给出的是模拟数据的重建成误差. 可以看出, 本文所提出的基于网格的

MXE 方法所获得的重建结果的误差 RSSE 较其它方法更小.

5.2 重建速度的比较

重建结果如图 3 所示, 其中 FBP 方法耗时 10.35 秒, MLEM 方法耗时 90.20 秒, MXE 方法耗时 92.41 秒, 基于网格

的 MLEM 方法耗时 83.20 秒, 基于网格的 MXE 方法耗时 84.87 秒. 由此看出本文方法消耗的时间要比 MLEM、MXE 方法消耗的少, 比 FBP 方法消耗时间长. 但是重建速度提高并不多, 主要是因为重建过程中的插值计算和网格生成比较复杂.

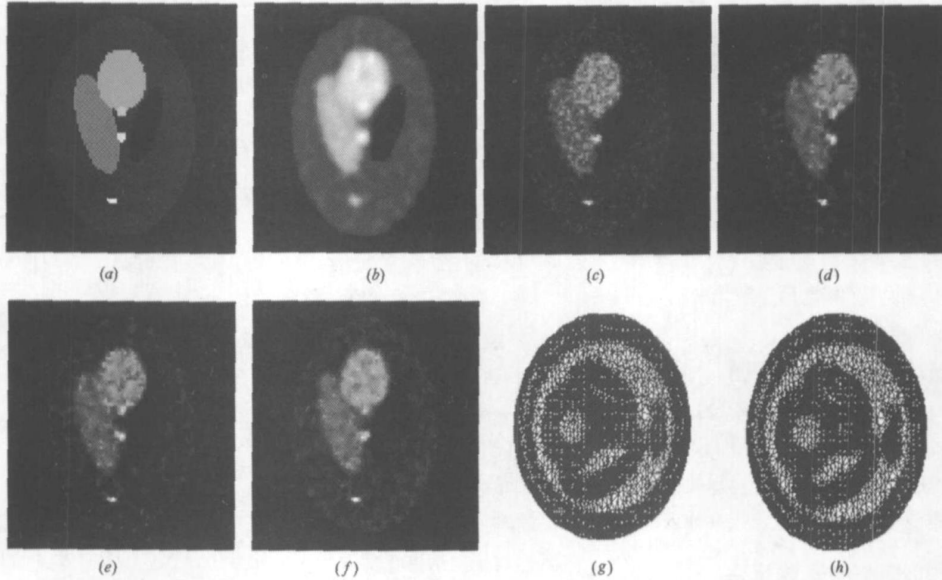


图 2 仿真数据的重建结果. (a)为未加噪声的原图, 下面 (b)-(f)均含有噪声. (b)FBP 方法的重建结果; (c)MLEM 方法的重建结果; (d)MXE 方法的重建结果; (e) 基于网格的 MLEM 方法的重建结果; (f) 基于网格的 MXE 方法的重建结果; (g)和 (h)分别为基于网格的 MLEM 方法和基于网格的 MXE 方法所得出的 Delaunay 三角网格图. 其中 $q=0.4, \gamma=0.5$, 迭代次数为 30 次, $\beta=0.5$

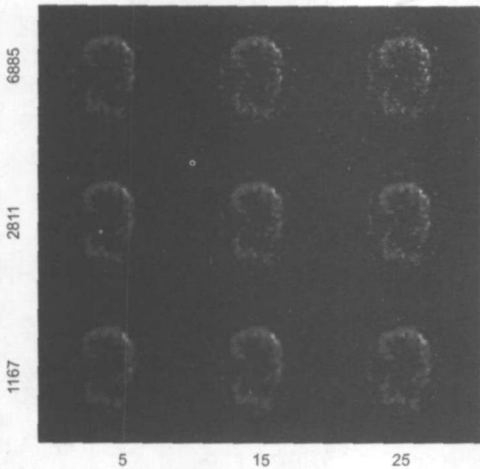


图 3 临床数据的实验结果. 其中横坐标为迭代次数, 纵坐标为提取的网格节点数, 参数 $\beta=0.5$

5.3 网格节点数目对重建结果的影响

其它几种方法所得结果的误差比较. $q = 0.4, \gamma = 0.5, \beta = 0.5$.

由第 2 节可知, 参数 q 和 γ 直接决定着网格节点的数目 T , 如图 5 所示. 由图 5 可知, q 和 γ 愈小则所产生的网格节点就愈多.

而由第 4 节可知, 网格节点的数目 T 对于重建结果有着极其重要的影响, 如图 6 所示. 由图 6 可知, 随着 T 的不断增

加, 误差会愈来愈小; 但是在迭代次数较大的情况下, T 愈大反而会使误差愈来愈大. 出现这种情况是因为: 虽然网格节点的数目愈大, 对图像的描述效果愈好, 但是同时也会引入更多的噪声, 随着迭代次数的不断增加, 这些噪声的影响会被不断放大, 反而使重建结果的误差变大. 所以, 随着的不断加, 误差并不是单调减小的.

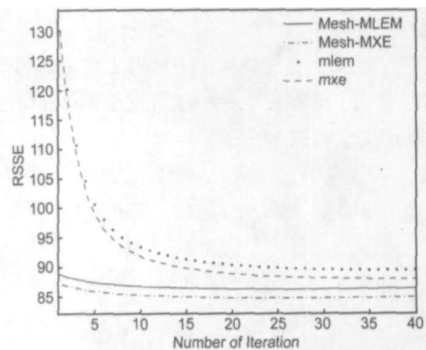


图 4 基于网格的 MXE 方法所得重建结果与其他几种方法所得结果的误差比较 $q=0.4, \gamma=0.5, \beta=0.5$

5.4 参数 β 对重建结果的影响

由第 3 节和第 4 节可知, β 实际上是一个平滑因子, 决定着先验信息模型 p 的平滑效果的大小, 它对实验结果的影响如图 7 所示. 由图 7 可知, 随着 β 的增加, 误差也会随之增加, 但并不是单调增加的, 例如当 $\beta = 0.5$ 时所对应的误差值却是最低的. 主要原因是: β 的大小决定着到底是选用式 (20) 还是

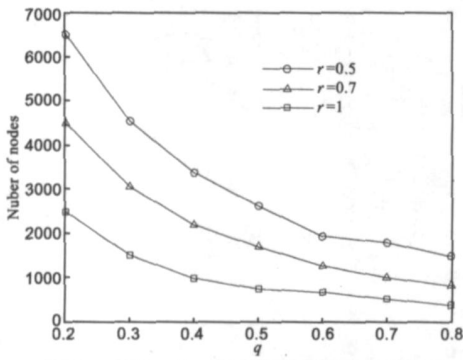


图 5 参数 q 和 γ 对网格节点数目 T 的影响

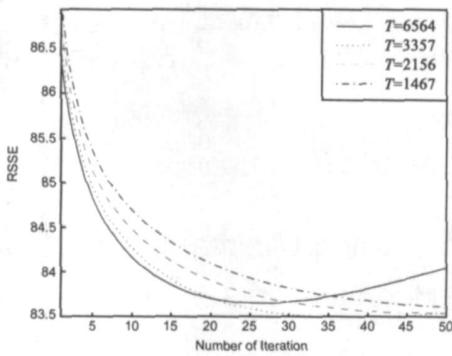


图 6 网格节点的数目 T 对于重建结果的误差的影响

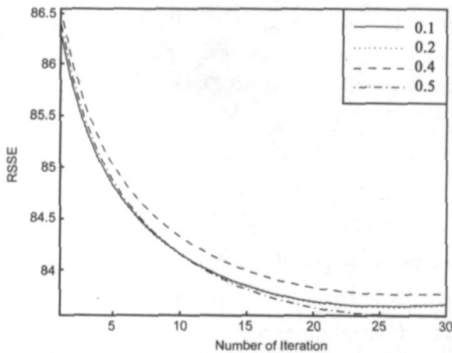


图 7 参数 β 对重建结果的误差的影响, 其中 $q=0.4, \gamma=0.5$

式(21)进行计算, 例如当 $\beta = 0.1$ 时是选用式(20), 而当 $\beta =$

0.5 时是利用式(21). 当条件 $\sum_{i=1}^N \frac{g_i c_n}{\sum_{k=1}^T f^{(j)}(X_k) c_k} > \beta \ln$

$\left(\frac{f^{(j)}(x_n)}{q_n^{(j)}} \right)$ 满足, 选用式(20)时, 随着 β 的增加误差会随之减少; 而当上述条件不满足, 选用式(21)时, 随着 β 的增加误差亦会随之减少. 但是从整个过程来说, 这种单调关系是不成立的.

6 总结

本文利用三角形网格方法与最小交叉熵(minimum cross entropy reconstruction)方法相结合给出一种新的 PET 图像重建算法. 实验表明该算法能给出较好的重建结果, 并且与其它重建方法相比, 误差有所下降; 而且该算法能够通过改变参数来获得更理想的重建结果.

值得指出的是, 如果在本文基础上加入三角形网格生成

的优化算法, 相信会取得更好的重建结果.

参考文献:

- [1] Shepp L A, Vardi Y. Maximum likelihood reconstruction for emission tomography [J]. IEEE Trans Med Imaging, 1982, MF 1 (2): 1- 3.
- [2] Ogawa K, Urabe H. Image quality in the modified ordered subset bayesian reconstruction [J]. Nuclear Science Symposium 1999, 2(2): 24- 30.
- [3] Babak A A, Michael B, Brian F H, et al. Minimum cross entropy reconstruction of PET images using prior anatomical information [J]. Phys Med Biol, 1996, 41(1) : 2497- 2517.
- [4] Som S, Hutton B F, Braun M. Properties of minimum cross entropy reconstruction of emission tomography with anatomically based prior [J]. IEEE Trans on Nuclear Science, 1998, 45(6) : 3014- 3016.
- [5] Jovan G, Yang Y Y, Wernick M N. Tomographic image reconstruction based on a content adaptive mesh model [J]. IEEE Trans on Medical Imaging, 2004, 23(2) : 203- 204.
- [6] Yang Y Y, Wernick M N, Brankov J G. A fast approach for accurate content adaptive mesh generation [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12(8) : 867- 876.
- [7] 王瑁成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1988. 146- 150.
- [8] Lee J, Yang Y, Wernick M N. A new approach for image content adaptive mesh generation [J]. Proc Image Processing, 2000, 1(2) : 10- 13.
- [9] Phongthanapanich S, Dechaumphai P. Adaptive delaunay triangulation with object oriented programming for crack propagation analysis [J]. Finite Elements in Analysis and Design, 2004, 40 (2) : 1753- 1771.

作者简介:



戴修斌 男, 1980 年生于江苏镇江, 1998 年至 2002 年于华中科技大学生物医学工程系攻读学士学位, 2003 年至 2004 年于东南大学生物医学工程系攻读硕士学位, 目前在东南大学生物医学工程系攻读生物医学影像专业博士学位, 研究方向: 医学图像重建, 医学图像处理.

E-mail: hustdb@sohu.com

朱宏擎 女, 博士后, 2000 年毕业于上海交通大学, 获工学博士学位, 2005 年在东南大学生物医学工程博士后工作期满出站, 现在华东理工大学信息科学与工程学院任教

舒华忠 男, 1965 年生于江西, 现为东南大学计算机系教授, 博士生导师, 1992 年获法国雷恩大学应用数学博士学位, 研究工作主要包括放射治疗计划优化、医学图像处理和模式识别等.

罗立民 男, 现为东南大学计算机系教授, 博士生导师, 1986 年 6 月于法国雷恩大学获信息处理博士学位, 研究工作主要包括三维医学图像重建、计算机辅助诊断和治疗以及科学可视化等.